

# تأخير المعادلات التفاضلية 1

1 من المرتبة الأولى والمحلولة بالنسبة للمتغير  $y'$

$$y' = F(x, y)$$

(P) معادلة المتغيرات:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) L(y)$$

تحويل إلى معادلة المتغيرات:

$$y' = F(ax + by + c)$$

تفرضه  $Z$

3 المعادلة المتجانسة:

$$y' = f(x, y)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

$$Z = \frac{y}{x} \text{ تفرضه}$$

4 تحويل إلى متجانسة:

$$y' = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

و مطابق

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$y' = F(\lambda) = C$$

$$y = Cx + C_1$$

كوازي

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

تفرضه

$$Z = a_2x + b_2y$$

تقاطع

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$(x_0, y_0)$$

$$x = x_0 + X$$

$$y = y_0 + Y$$

$$dx = dX$$

$$dy = dY$$

$$Z = \frac{Y}{X} \text{ تفرضه}$$





٤٣٨

## المتجانب

$$\int p(x) dx$$

نقیر، قنیر یا  $x$  و  $x$

$$y' = \dots$$

$$\frac{dx}{dy} + P(y)X = R(y)$$

جَعِشَ لَدُنُوهُ

قرء الى خصة

7

← (۶) بر فوئی

تقریباً  $Z = \frac{1}{y_{n-1}}$  متذبذب ذلیله ← لائزانی

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = R(y)x^n$$

۷. (ب) یکاری

apb do y,

تَقْرَضُ

"ADANOV"

$$\Rightarrow y' = y'_1 + \frac{z'}{2}$$

بسم الله الرحمن الرحيم  
الحمد لله رب العالمين  
والصلاة والسلام على  
سيدنا محمد وآله الطيبين الطاهرين  
الطاهرين

المعادلة متجانسة الأبعاد

□

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

که  $x \rightarrow x$ ، که  $y \rightarrow y$ ، که  $\lambda x \rightarrow dx$ ، که  $\lambda y \rightarrow dy$

$$Z = \frac{y}{x^n}$$

وَقُضِيَ

وَتَسِي الْجَانِبِ الْعَامِ

من طائفة العقول

نبتان المعدلة من ناحية على الأبعاد العشوائية التباينة. وأولها هو



المعادلة التامة

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{تامة}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad \text{... (1)}$$

نبحث عن F:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q \quad \text{... (2)}$$

جغفر أدفون

مثلاً تكامل ① بالنسبة لـ x ونضيف ثابتاً لها المعادلة ونستق بالنتيجة لـ y ونقارن مع ②

فوجد F

$$F = 0 \quad \text{الحل العام}$$

1. التي تسمى دالة تامة / عامل التكميل /

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{حيث}$$

نبحث عن  $\mu$  عامل التكميل

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx$$

$$\mu \text{ تابع لـ } x$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} dy$$

$$\mu \text{ تابع لـ } y$$



$$\frac{\partial \ln M}{\partial z} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q - P} \partial z$$

$M$  تابع لـ  $x, y$

$$\frac{\partial \ln M}{\partial z} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q \frac{\partial z}{\partial x} - P \frac{\partial z}{\partial y}}$$

$M$  تابع لـ  $x^2, y^2$

نضرب عامل التكامل بالمعادلة  
نصبح تامة ونكمل كالآتي

### 11) المعادلات غير المحلولة بالنسبة للمتق

(1) يمكن عزل  $y$  :  $y = f(x, y)$

تفرقة  $P = y$  ثم نتق المعادلة بالنسبة لـ  $x$

نتق  $\rightarrow$  نصل المعادلة

$\frac{dx}{dp}$  نقل النسبة لنصل

نصبح معادلة خطية

نحو  $x$  بدلالة  $C$  و  $P$

نحسب  $P$  من  $x$  أي هنا

نكون عن  $x$  و  $P$  في أول معادلة

(2) يمكن عزل  $x$  !



(3) لينة تافعة لـ  $y$   $x = f(y')$  وسيطي

- ⊖ تعرض  $y' = t$
- ⊖ نمون بالمعادلة ونشتق  $x$  بالنسبة لـ  $t$  أي  $\frac{dx}{dt}$
- ⊖ تعرض في  $dy = t dx$
- ⊖ تكامل الأضد فيحصل على  $y$
- ⊖  $\left. \begin{array}{l} y = -t \\ x = -t \end{array} \right\}$   $t$  كد وسيطي بدلالة  $t$

(4) لينة تافعة لـ  $x$   $y = f(x')$  وسيطي

- ⊖ تعرض  $x' = t$
- ⊖ نمون بالمعادلة ونشتق  $y$  بالنسبة لـ  $t$  أي  $\frac{dy}{dt}$
- ⊖ تعرض في  $dx = \frac{dy}{t}$

- ⊖ تكامل الأضد فيحصل على  $x$
- ⊖  $\left. \begin{array}{l} x = -t \\ y = -t \end{array} \right\}$   $t$  كد وسيطي بدلالة  $t$

(5) لا تكون  $x$  و  $y$   $F(y') = 0$

⊖ نمون بدلالة  $y$  بـ  $\frac{y-x}{x}$

فعل

جعفر أذنوف

# السيد تواب

انتهى المقرر

تواب

موازيك







ADANOUU  
c. N / 0 / 1.

# المعادلات التفاضلية

المعادلة = التفاضلية من الرتبة الأولى والمحلولة بالنسبة للشت  $y'$   
 $y' = f(x, y)$

(1) مضبوطة التغيرات :  $y' = f(x, y)$

(2)  $y' = g(x) L(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(x) L(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{L(y)} = \int g(x) dx + C$

مثال 1 :  $x(y^2 - 1) dx + y(x^2 - 1) dy = 0$

$y(x^2 - 1) dy = x(1 - y^2) dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1 - y^2)}{y(x^2 - 1)}$

$\frac{y' dy}{1 - y^2} = \frac{x}{x^2 - 1} dx \Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{-2y dy}{1 - y^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \ln|1 - y^2| = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + \ln C$

$\Rightarrow \boxed{\sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)} = \frac{1}{C}}$  2. العام

2)  $y' = \frac{-y}{x-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x-3} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x-3}$

$\ln y = -\ln|x-3| + \ln C \Rightarrow \boxed{y = \frac{C}{x-3}}$  (حل العام)

(2) معادلات تؤول إلى مضبوطة التغيرات :

$y' = f(ax + by + c)$

من الشكل :

$z = ax + by + c$  من أجل ذلك نفرض

مثال 1

$y' = 2x + y - 1$

$z = 2x + y - 1$

نفرض

$\Rightarrow z' = 2 + y' \Rightarrow y' = z' - 2$

$z' - 2 = z \Rightarrow z' = z + 2$

نفرض نجد



$$\Rightarrow Z - \ln(z+2) = x + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln e^Z - \ln(z+2) = \ln e^Z + \ln c$$

$$\Rightarrow \left( \frac{e^Z}{z+2} = c e^Z \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z+2} = dx \Rightarrow \ln(z+2) = x + \ln c$$

$$\Rightarrow z+2 = c e^x \Rightarrow z = c e^x - 2$$

$$\Rightarrow (y+2x-1 = c e^x - 2) \Rightarrow y = -2x + c e^x - 1$$

$$x f(xy) dx + y f(xy) dy = 0$$

② مثال ②

تقریباً  $Z = x \cdot y$

$$x f(z) dx + y f(z) dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{x} = \frac{z}{x^2} dx$$

$$y(1-xy) dx - x(1+xy) dy = 0$$

$$\Rightarrow y(1-xy) dx = x(1+xy) dy$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y(1-xy)}{x(1+xy)}$$

$$y = \frac{z}{x} \rightarrow y' = \frac{z'x - z}{x^2} \quad Z = xy \quad \text{تقریباً}$$

$$y' = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}$$

$$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = \frac{\frac{z}{x}(1-z)}{x(1+z)}$$

تقریباً

تقریباً  $x^2$

$$\Rightarrow x z' - z = z \left( \frac{1-z}{1+z} \right)$$

$$\Rightarrow x z' = \frac{2z}{1+z} \Rightarrow \frac{1+z}{2} dz = \frac{z dx}{x}$$



# جبر أرنوف

1 / 1

## المعادلة المتجانسة:

تقول لنا  $y' = f(x, y)$  انها متجانسة اذا حققت

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

وهنا نفرض  $z = \frac{y}{x}$

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \rightarrow \frac{2 \cdot \frac{y}{x}}{1 - (\frac{y}{x})^2}$$

هناك أرنوف الدال العام للمعادلة

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda x \lambda y}{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = f(x, y) \Rightarrow \text{متجانسة}$$

$$y' = z'x + z \quad \leftarrow y = z \cdot x \quad \Leftrightarrow z = \frac{y}{x}$$

نفرض

$$z'x + z = 2 \frac{z}{1 - z^2} \Rightarrow z'x = \frac{2z - z}{1 - z^2}$$

$$z'x = \frac{2z - z + z^3}{1 - z^2} \Rightarrow z'x = \frac{z^3 + z}{1 - z^2}$$

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{z^3 + z}{1 - z^2} \Rightarrow \frac{1 - z^2}{z^3 + z} dz = \frac{dx}{x}$$

لحساب التكامل ويكون درجته البسط أصغر من المقام نفوق الكسور

$$\frac{1 - z^2}{z(z^2 + 1)} dz = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - z^2}{z(z^2 + 1)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2 + 1}$$

لحساب A نضرب الطرفين بمتانها ونفوق بدل z بـ 0 نجد

$$\frac{1 - z^2}{z^2 + 1} = A + z \frac{Bz + C}{z^2 + 1} \Rightarrow 1 = A + 0 \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

لحساب B يجعل البسط من درجته المقام نفوقه لا نهائي عند  $z \rightarrow \infty$  نجد

$$\frac{1 - z^2}{z^2 + 1} = A + \frac{Bz^2 + Cz}{z^2 + 1} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - z^2}{z^2 + 1} \right) = A + \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{Bz^2 + Cz}{z^2 + 1} \right)$$

$$-1 = A + B \Rightarrow B = -2$$

نعرف عن A قيمتها نجد



$$\frac{1-z^2}{z^2+1} \text{ و } DR \setminus \{0\}$$

لنأخذ  $C$  نعوض عن قيمة  $B$  و  $A$  فنستأثر قيمة  $z$  من مجموعة تعريف الدالة لا يمكن  
 اختيار  $[z=1]$  ونعوض كل ما سبقه في التركيب المرادها بالحل

$$\frac{1-1}{1+1} = \frac{1}{1} + \frac{-2(1)+C}{2} \Rightarrow 0 = 2 - 2 + C$$

$$\Rightarrow \boxed{C=0}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-z^2}{z(z^2+1)} dz = \int \frac{1}{z} dz - \int \frac{2z}{z^2+1} dz$$

$$= \ln z - \ln(z^2+1)$$

$$\int \frac{1-z^2}{z(z^2+1)} dz = \int \frac{dx}{x}$$

نعود للمعادلة نجد

$$\Rightarrow \ln z - \ln(z^2+1) = \ln x + \ln C$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z^2+1} = Cx$$

$$\frac{y}{x^2+y^2+1}$$

$$= Cx \Rightarrow \frac{x^2 y}{x y^2 + x^3} = Cx$$

$$\Rightarrow \frac{xy'}{x^2+y^2} = Cx \Rightarrow \boxed{\frac{y}{x^2+y^2} = C}$$

المعادلة التي نريد إلى صيغة بسيطة:

وهناك حالات



$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

حالة ①  
حالة تعام

بالنظام المشترك  $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0)$  نقطة التقاطع

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases}$$

تفرض

$$Z = \frac{Y}{X}$$

وتفرض

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

حالة ②  
حالة توازي

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda a_2 \\ b_1 = \lambda b_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

تفرض

$$Z = a_2x + b_2y \quad \text{فترجم الى متغيرة واحدة او متغيرتين}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda$$

حالة ③  
حالة تطابق

$$\Rightarrow y' = f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y + c_2)}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

$$\Rightarrow y' = f(\lambda) = C \Rightarrow y = Cx + C_1$$

الحل العام لها



1)  $(2x-y)dx - (2x-y+1)dy = 0$  نوجد الحل العام للمعادلة

$$\Rightarrow y' = \frac{2x-y}{2x-y+1}$$

$$\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} + \frac{0}{1}$$

حالة توازي نقره

$$z = 2x - y \Rightarrow z' = 2 - y' \Rightarrow y' = 2 - z'$$

بفرضه

$$2 - z' = \frac{z}{z+1} \Rightarrow -z' = \frac{z - 2z - 2}{z+1} = \frac{-z-2}{z+1}$$

$$\Rightarrow z' = \frac{z+2}{z+1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z+2}{z+1} \Rightarrow \frac{z+1}{z+2} dz = dx$$

$$\Rightarrow \left( \frac{z+2}{z+2} - \frac{1}{z+2} \right) dz = dx \Rightarrow \int dz - \int \frac{dz}{z+2} = \int dx$$

$$\Rightarrow z - \ln(z+2) = x + C \Rightarrow \ln e^z - \ln(z+2) = \ln e^x + \ln C$$

$$\Rightarrow (z+2)e^z = Ce^x \Rightarrow \frac{e^z}{(z+2)} = Ce^x$$

نقسم بالمتحول = النتيجة

ع. ح

$$\boxed{\frac{e^{2x-y}}{(2x-y+2)} = Ce^x}$$

2)  $y' = \frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$  نوجد الحل العام للمعادلة:

$$\frac{2}{2} + \frac{-5}{4} + \frac{3}{-6}$$

حالة تقاطع

نوجد نقطة التقاطع

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ 2x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$0 - 9y + 9 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow M(1,1)$$

هوازيك 6



فرض

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + X \\ y = 1 + Y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = dX \\ dy = dY \end{array}$$

$$Y' = \frac{2(1+X) - 5(1+Y) + 3}{2(1+X) + 4(1+Y) - 6}$$

ببدا في المعادلة بحذر

$$\Rightarrow Y' = \frac{2+2X-5-5Y+3}{2+2X+4+4Y-6} = \frac{2X-5Y}{2X+4Y} \quad \left( \begin{array}{l} \text{أصحت بمجانسة} \\ \text{أنته} \end{array} \right)$$

فرض  $Z = \frac{Y}{X}$

$$\Rightarrow Y' = \frac{2 - 5 \frac{Y}{X}}{2 + 4 \frac{Y}{X}} \Rightarrow Y' = \frac{2 - 5Z}{2 + 4Z}$$

$Y = ZX$   
 $\Rightarrow Y' = Z'X + Z$

$$\Rightarrow Z'X + Z = \frac{2 - 5Z}{2 + 4Z} \Rightarrow Z'X = \frac{2 - 5Z - 2Z - 4Z^2}{2 + 4Z}$$

$$\Rightarrow Z'X = \frac{-4Z^2 - 7Z + 2}{4Z + 2} \Rightarrow X \frac{dZ}{dX} = \frac{-4Z^2 - 7Z + 2}{4Z + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{4Z + 2}{4Z^2 + 7Z - 2} dZ = -\frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{8Z + 4}{4Z^2 + 7Z - 2} dZ = -\int \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[ \int \frac{8Z + 7}{4Z^2 + 7Z - 2} dZ - \frac{3}{2} \int \frac{dZ}{4Z^2 + 7Z - 2} \right] = -\int \frac{dX}{X}$$

كما اننا نحلل تفریق الجذور

$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 9 \Rightarrow \begin{array}{l} Z_1 = -2 \\ Z_2 = \frac{1}{4} \end{array}$$

$$4Z^2 + 7Z - 2 = (Z + 2)(Z - \frac{1}{4}) = 0$$



کل ما سبق هو عبارة عن معادلات بالحدود

$$y' = f(x, y)$$

أو  $dy = f(x, y) dx$

متغيرة التفاضل

$$\Rightarrow \frac{1}{(z+2)(z-\frac{1}{4})} = \frac{A}{(z+2)} + \frac{B}{(z-\frac{1}{4})}$$

حساب A نضرب الطرفين بالحد  $(z+2)$  ونعوض  $z = -2$  في الحد  $(z-\frac{1}{4})$

$$\frac{1}{(z+2)(z-\frac{1}{4})} = A + B \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z-\frac{1}{4}} = A + \frac{(z+2)}{z-\frac{1}{4}} B \Rightarrow \frac{1}{-2-\frac{1}{4}} = A + 0$$

نوجد  $A$  بالحد  $(z-\frac{1}{4})$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{-\frac{8}{4}-1} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{4}{9}}$$

حساب B نضرب الطرفين بالحد  $(z-\frac{1}{4})$  ونعوض  $z = \frac{1}{4}$  في الحد  $(z+2)$

$$\frac{1}{z+2} = B \Rightarrow B = \frac{1}{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{\frac{1+8}{4}} = \boxed{\frac{4}{9} = B}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(z+2)(z-\frac{1}{4})} dz = \int \frac{-\frac{4}{9}}{z+2} dz + \int \frac{\frac{4}{9}}{(z-\frac{1}{4})} dz$$

$$= -\frac{4}{9} \ln(z+2) + \frac{4}{9} \ln(z-\frac{1}{4})$$

بالعودة للحد  $z$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(4z^2+7z-2) - \frac{2}{3} \left[ \frac{4}{9} \right] \left[ \ln(z-\frac{1}{4}) - \ln(z+2) \right] = -\ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(4z^2+7z-2) - \frac{2}{3} \ln\left(\frac{z-\frac{1}{4}}{z+2}\right) = -\ln x + \ln c$$

$$\frac{\sqrt{4z^2+7z-2}}{\left(\frac{z-\frac{1}{4}}{z+2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{c}{x} \Rightarrow \frac{(4\frac{y^2}{x^2}+7\frac{y}{x}-2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\frac{y}{x}-\frac{1}{4}}{\frac{y}{x}+2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{c}{x}$$

نضرب الطرفين بـ  $x$  ونعوض  $x = \frac{y}{x}$  في الحد  $(z-\frac{1}{4})$  ونعوض  $x = \frac{y}{x}$  في الحد  $(z+2)$



① شبه الامتداد

المعادلات التفاضلية: تم معادلة على الشكل

$$y' + P(x)y = R(x)$$

فلها نأخذ المتجانسة منها

$$y' + P(x)y = 0 \Rightarrow y' = \pm P(x)y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \pm P(x)dx \Rightarrow \ln y = \pm \int P(x)dx$$

$$\Rightarrow \ln y = \pm \int P(x)dx + \ln c$$

$$\Rightarrow y = c e^{\pm \int P(x)dx} \quad (*)$$

فتعتبر  $c$  متغير بالشبه  $x$  ونشتق لجد

$$y' = c' e^{\int P(x)dx} - c P(x) e^{\int P(x)dx} \quad (*)$$

نوضف  $(*)$  و  $(*)$  في المتجانسة (لا تخطئ)

$$c' e^{\int P(x)dx} - c P(x) e^{\int P(x)dx} + c P(x) e^{\int P(x)dx} = R(x)$$

$$\Rightarrow c' = R(x) e^{-\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow c = \int R(x) e^{\int P(x)dx} dx + C_1$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int R(x) e^{\int P(x)dx} dx + C_1 \right)$$



$$x^4 y' - 2y = 2x^4$$

أوجد الحل العام للمعادلة

الحل لا سيطرة

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{2}{x}x^4$$

لا غراني

معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة تأخذ الصورة

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$$

$$\Rightarrow \ln y = 2 \ln x + \ln c \Rightarrow \boxed{y = Cx^2}$$

نجعل  $C$  متغير  $x$  ونفقد الحد

$$\boxed{y' = C'x^2 + 2Cx}$$

نقوم بحل المعادلة غير المتجانسة

$$C'x^2 + 2Cx - 2Cx = 2x^3$$

$$\Rightarrow C' = 2x \Rightarrow \boxed{C = x^2 + C_1}$$

نقوم بحل الحل العام للمعادلة

$$\boxed{y = x^4 + C_1 x^2}$$

ع. 2.7



$$x' + p(y)x = R(y)x^n$$

يمكن تكون دوني بالمثل

★ المعادلات التي تدعى خطية ← تسمى لا غرائج

(P) معادلة برنولي

$$y' + P(x)y = R(x)y^n$$

نقسم على  $y^n$

$$\frac{y'}{y^n} + P(x) \frac{1}{y^{n-1}} = R(x)$$

و نعرف  $Z = \frac{1}{y^{n-1}}$

فقد إلى خطية متابع  $Z$  وحل  $x$

مثال:

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$$

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$$

برنولي

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$$

نعرف  $Z = \sqrt{y}$

فقد أن

$$\Rightarrow y = Z^2$$

و نعرف  $Z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$

$$2Z' - \frac{4}{x}Z = x \Rightarrow Z' - \frac{2}{x}Z = \frac{x}{2}$$

خطية متابع  $Z$  بد غرائج  
مضامنة

$$Z' - \frac{2}{x}Z = 0$$

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{2}{x}dx \Rightarrow Z = Cx^2$$

نعتبر  $C$  تابع لـ  $x$  و نستبدل

$$Z' = C'x^2 + 2Cx$$

$$C'x^2 + 2Cx - 2Cx = \frac{x}{2} \Rightarrow C' = \frac{1}{2x}$$

نقسم على  $x$  ونكامل

$$\Rightarrow C = \ln \sqrt{x} + C_1$$

نقسم على  $x^2$

$$Z = x^2 \ln \sqrt{x} + C_1 x^2 \Rightarrow y = x^2 \ln \sqrt{x} + C_1 x^2$$

هوازيك



قائمة هذه الفكرة أرجو الفهم المأمور

$$(2y\sqrt{y} \cos y + x) \frac{dy}{dx} = 2y \quad \text{حل المعادلة}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2y\sqrt{y} \cos y + x}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2y\sqrt{y} \cos y}{2y} + \frac{x}{2y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \sqrt{y} \cos y + \frac{x}{2y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{2y} = \sqrt{y} \cos y \Rightarrow \boxed{X' - \frac{1}{2y}X = \sqrt{y} \cos y}$$

فرضية تابع  $x$  يعتمد  $y$

$$X' - \frac{1}{2y}X = 0$$

نأخذ المتجانسة  $W$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y}X \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \ln y + \ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{X = C\sqrt{y}} \quad *$$

ليجعل  $C$  متغير لا مستقل

نعود في المعادلة نجد

$$\boxed{X' = C'\sqrt{y} + C \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

$$C'\sqrt{y} + \frac{C}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2y}C\sqrt{y} = \sqrt{y} \cos y$$

$$\Rightarrow C'\sqrt{y} = \sqrt{y} \cos y \Rightarrow C' = \cos y$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \sin y + C_1}$$

$$* \neq C \sin y *$$

نعود في  $*$  نجد

$$\boxed{X = \sqrt{y} \sin y + C_1 \sqrt{y}}$$

ع. 2



$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = R(y)x^n$$

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = C \rightarrow \text{خطية د X}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot x^3 \sin y + 2y = x \frac{dy}{dx}$$

حل للمعادلة

$$x^3 \sin y \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\Rightarrow (x^3 \sin y - x) \frac{dy}{dx} = -2y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{x^3 \sin y - x}$$

(نقلب لوجود  $\sin y$  في المقام)

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x^3 \sin y}{2y} + \frac{x}{2y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y} x - \frac{\sin y}{2y} x^3 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y} x = -\frac{\sin y}{2y} x^3$$

برخوبی

$$X' - \frac{1}{2y} X = -\frac{\sin y}{2y} X^3$$

نقح على  $X^3$  جذ

$$\frac{X'}{X^3} - \frac{1}{2y} \frac{1}{X^2} = -\frac{\sin y}{2y}$$

$$Z = \frac{1}{X^2} \Rightarrow Z' = -\frac{2XX'}{X^4} \Rightarrow Z' = -2 \frac{X'}{X^3} \Rightarrow -\frac{1}{2} Z' = \frac{X'}{X^3}$$

نفرض

نوف جذ

$$-\frac{1}{2} Z' - \frac{1}{2y} Z = -\frac{\sin y}{2y}$$

$$\Rightarrow Z' + \frac{1}{y} Z = \frac{\sin y}{y}$$

خطية بتابع  $Z$  ومعدل  $y$

ثابت المتباينة صفر

$$Z' + \frac{1}{y} Z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{C}{y}}$$

$$\boxed{Z' + \frac{1}{y} Z = \frac{C'y - C}{y^2}}$$

نوف  $Z$  لغير المتباينة

$$C'y y^2 - C y^{-2} + C y^2 = \frac{\sin y}{y} \Rightarrow C = -\cos y + C_1 y^{-1}$$

$$\Rightarrow Z = -y^{-1} \cos y + C_1 y^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{x^2} = \frac{-\cos y}{y} + \frac{C_1}{y}}$$



$$(x+2) + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

وظيفة

(ب) معادلة ريكاتي - براقتها حل خاص ممكن

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 + r(x) = 0$$

و لا حل خاص

نقولها في صيغة مباشرة

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

نفرض

لو جداول العام:  $y_1 = x+2$  و  $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$

هو المعادلة ريكاتي

$$y = x+2 + \frac{1}{z}$$

نفرض

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$$

نفرض

$$1 - \frac{z'}{z^2} - 2x^2 - 4x - \frac{2x}{z} + (x+2+\frac{1}{z})^2 = 5 - x^2$$

نضرب

$$1 - \frac{z'}{z^2} - 2x^2 - 4x - \frac{2x}{z} + (x+2)^2 + 2(x+2)(\frac{1}{z}) + \frac{1}{z^2} = 5 - x^2$$

$$x - \frac{z'}{z^2} - 2x^2 - 4x - \frac{2x}{z} + x^2 + 4x + 4 + \frac{2x}{z} + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} + x^2 - 5 = 0$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \Rightarrow z' - 4z - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 4z+1 \Rightarrow \frac{1}{4} \frac{dz}{4z+1} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \ln(4z+1) = x + \ln c = (4z+1)^{\frac{1}{4}} = ce^x$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{4z+1} = ce^x$$

$$\frac{1}{4} = y - x - 2$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{y-x-2}$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt[4]{\frac{4}{y-x-2} + 1} = ce^x$$



بعد فتوى في شكلها الكافي

$$y_1 + y_2 = \frac{2}{x^2} \quad \text{و} \quad y_1 = -\frac{1}{x}$$

معادلة ريكاتي لنفرض

$$y = y_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{2}$$

نضرب في 2

$$\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$-\frac{z'}{2} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow z' + \frac{2}{x}z - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z' + \frac{2}{x}z = 1} \quad \text{طريقة متغير z و متحول x}$$

نضع المتغيرة

$$z' + \frac{2}{x}z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -2 \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = Cx^{-2}} \quad \text{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{z' = C'x^{-2} - 2Cx^{-3}}$$

نعويد في المعادلة

$$C'x^{-2} - 2Cx^{-3} + 2x^{-3} = 1$$

$$\Rightarrow C' = x^2 \Rightarrow \boxed{C = \frac{x^3}{3} + C_1}$$

نعويد في A

$$\boxed{z = \frac{x}{3} + C_1 x^{-2}}$$

$$\text{نعويد } y_2 = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = y + \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{z = \frac{x}{xy+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{xy+1} = \frac{x}{3} + C_1 x^{-2}}$$

ع. ح. 9



المعادلة متجانسة بالأبعاد

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

~~كل  $y$  ب  $x$  ب  $\lambda$~~

بما تبديل كل  $x$  ب  $\lambda x$   
كل  $y$  ب  $\lambda^n y$

وكل  $x$  ب  $\lambda x$  و  $y$  ب  $\lambda^n y$  ونعرفه ونطابق  
فتصل على معادلة متجانسة  $n$  هي درجة المتجانس وبالتالي نعرفه انظر المثالين

$$z = \frac{y}{x^n}$$

ببديل كل  $x$  ب  $\lambda x$  و  $y$  ب  $\lambda^n y$  و  $z$  ب  $\lambda^{n-1} z$  بحاشي الأبعاد ونفس الخطوات

وحيث أن المعادلة التالية متجانسة في الأبعاد من الدرجة الثالث وأوجد لها العام

$$(x^3 + xy)y' = y^2 - x^4$$

ببديل كل  $x$  ب  $\lambda x$  و  $y$  ب  $\lambda^2 y$  و  $z$  ب  $\lambda^{n-1} z$  نجد

$$(2^3 x^3 + 2x 2^n y) 2^{n-1} y' = 2^{2n} y^2 - 2^4 x^4$$

$$(2^{n+2} x^3 + 2^{2n} xy) y' = 2^{2n} y^2 - 2^4 x^4$$

بالمطابقة بين القوى نجد

$$n+2 = 2n = 2n = 4 \Rightarrow n = 2$$

$$z = \frac{y}{x^2}$$

نرى متجانسة من الدرجة الثالثة نعرفها

$$y = z x^2 \Rightarrow y' = z' x^2 + 2x z$$

هوازيك

نحوها في المعادلة نجد



$$(x^3 + x^3 z)(2xz + x^2 z') = x^4 z^2 - x^4$$

de

$$2x^4 z + x^5 z' + 2x^4 z^2 + x^5 z z' = x^4 z^2 - x^4$$

$$\Rightarrow 2z + xz' + 2z^2 + xzz' = z^2 - 1$$

$$\Rightarrow \cancel{x(1+z)z'} + \cancel{z^2} + \cancel{2z} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{x(1+z)z'} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x(z+1)z' + 2z(z+1) = (z+1)(z-1)$$

$$\Rightarrow xz' + 2z = z - 1 \Rightarrow xz' + z = -1$$

$$\Rightarrow xz' = z - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z-1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(z-1) = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln(z-1) = \ln x + \ln c \Rightarrow z-1 = cx$$

$$\Rightarrow z-1 = cx \Rightarrow z = cx+1$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x^2} = cx+1 \Rightarrow \boxed{y = cx^3 + x^2}$$

l'eq



كل  $x$   $\rightarrow x$  وكل  $dx$   $\rightarrow dx$   
 كل  $y$   $\rightarrow y^n$  وكل  $dy$   $\rightarrow y^{n-1} dy$

اعتماداً على التجانس العام، نعتبر الحالة الأولى

$$(6 - xy) dx + x^2 dy = 0$$

نبدأ بـ  $x$ ،  $x \rightarrow x^n$ ، وكل  $y$   $\rightarrow y^{n+1}$ ، وكل  $dx$   $\rightarrow x^{n-1} dx$ ، وكل  $dy$   $\rightarrow y^n dy$

$$(6 - x^n y) x^n dx + x^{2+n} y^n dy = 0$$

$$\Rightarrow (6x^n - x^{n+2} y) dx + x^{2+n} y^n dy = 0$$

نطابق الحدود

$$n+2=1 \Rightarrow n=-1$$

$$\boxed{Z = xy} \quad \leftarrow Z = \frac{y}{x-1} \quad \text{نعرّف}$$

$$\Rightarrow y = \frac{Z}{x} \Rightarrow y' = \frac{Z'x - Z}{x^2} \Rightarrow \left( \frac{y}{x} \right)' = \frac{Z'}{x} - \frac{Z}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{6-xy}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Z'}{x} - \frac{Z}{x^2} = -\frac{6-Z}{x^2} \Rightarrow xZ' - Z = -6 + Z$$

$$\Rightarrow \frac{Z'}{x} - \frac{Z}{x^2} = \frac{Z}{x^2} - \frac{6}{x^2} \quad \text{أو } \frac{dZ}{dx} = 2Z - 6$$

$$\frac{1}{2} \ln(2Z-6) = \ln x + \ln C$$

$$\Rightarrow Z' - \frac{2}{x} Z = -\frac{6}{x}$$

نقسم كلا الطرفين بـ  $2Z-6$  ونصلح

$$\sqrt{2Z-6} = Cx$$

$$2Z-6 = C^2 x^2 \quad Z' - \frac{2}{x} Z = 0$$

المقارنة

$$Z = 3 + \frac{C^2}{2} x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Z = Cx^2} \Rightarrow \boxed{Z' = C'x^2 + 2Cx}$$

$$y \cdot x = 3 + \frac{C^2}{2} x^2$$

نضرب كلا الطرفين

$$y = \frac{3}{x} + C_1 x \quad C' = -6x^{-3} \Rightarrow C = -\frac{6}{2} x^{-2} + C_1$$

$$\boxed{Z = 3 + C_1 x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{xy = 3 + C_1 x^2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{x} + C_1 x}$$

هناك



بالخط

وإذا ما افكرنا في الطريقة السابقة بتجملها للمعادلة التامة

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

تكون المعادلة السابقة التامة إذا وجدنا  $F(x,y)$  بحيث أن

$$dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

شرط المعادلة التامة

البحث عن  $F$

سوف نحل معادلة التامة

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q \quad (2)$$

$$F = 0$$

نوجد  $F$

الحل العام



أوجد الكمال العام للمعادلة  $= 0$

$$P = 2x + 2x\sqrt{x^2-y}$$

$$Q = -\sqrt{x^2-y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2-y}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2-y}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2-y}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2-y}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

معادلة تامه

البحث عن F :

$$P \sim \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2x\sqrt{x^2-y} \quad \text{--- (1)}$$

$$Q \sim \frac{\partial F}{\partial y} = -(x^2-y)^{\frac{1}{2}} \quad \text{--- (2)}$$

$$F = \frac{(x^2-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \varphi(x) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{صند } \textcircled{2} \text{ لـ} \\ \text{تكاملا بالنسبة لـ } y \text{ ونفصل متغير } x \\ \text{تكاملا لـ } y \end{array}$$

$$F = \frac{2}{3} (x^2-y)^{\frac{3}{2}} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^2-y)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x + \varphi'(x)$$

دقيق بالنسبة لـ x

$$2x(x^2-y)^{\frac{1}{2}} + \varphi'(x) = 2x + 2x\sqrt{x^2-y}$$

نروض في (1) في

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 2x \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = x^2 + C}$$

نحللها

20

هوازيك

$$F(x,y) = \frac{2}{3} (x^2-y)^{\frac{3}{2}} + x^2 + C$$

نعود بالكمال العام

$$\Rightarrow \text{هوازيك العام} = 0$$



ثوابه لكل العام للمعادلة:  $0 = y \left( \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} \right) dx + \left( \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} \right) dy$

$$P = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}, \quad Q = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{2y(x-y)^2 - 2(x-y)(-1)y^2}{(x-y)^4}$$

$$= \frac{-2xy - 2y^2 + 2y^2}{(x-y)^3} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x(x-y)^2 - 2(x-y)x^2}{(x-y)^4} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

نتيجة من  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}$$

منه  $f = \ln x - y^2 \left( \frac{dx}{(x-y)^2} \right) = \ln x - y^2 \int \frac{dx}{(x-y)^2} dx$

$$\Rightarrow f = \ln x - y^2 \left( \frac{x-y}{-1} \right) + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow f = \ln x + y^2(x-y) + \varphi(y)$$

حتمه بالسوية لـ  $y$  نجد

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x-y) - 1(-1)(x-y)^2 y^2 + \varphi'(y)$$

نضرب في  $(x-y)^2$  نجد

$$\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} = 2y(x-y) + (x-y)^2 y^2 + \varphi'(y)$$



$$(x-y)^2 = (y-x)^2$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{x-y} + \frac{y^2}{(x-y)^2} + \varphi'(y) = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} + \frac{2y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{x^2 - y^2}{(x-y)^2} - \frac{x-y + 2y^2}{y(x-y)}$$

$$= \frac{x^2 - y^2 - x + y - 2y^2}{(x-y)^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2} + \frac{y-x-2y^2}{xy-y^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{x+y}{x-y} - \frac{2y}{x-y} - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{x-y}{x-y} - \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = y - \ln y + C$$

كثير

$$F(x, y) = \ln x + \frac{y^3}{x-y} + y - \ln y + C$$

$$F(x, y) = \ln \frac{x}{y} + y + \frac{y^3}{x-y} + C$$

الان

$$\ln \frac{x}{y} + y + \frac{y^3}{x-y} = 0$$



1 / ( ~~المعادلة~~ )

1)  $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$  لإيجاد الحل العام

$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy \Rightarrow$  لا  
توجد  $F$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \quad \text{--- (1)}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3 \quad \text{--- (2)}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \xrightarrow{\text{دمج } x} f = x^3 + 3x^2y^2 + 4y^3 \quad \text{--- (3)}$   
من (1) نجد  
في متغير البقية لا نجد

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3 \quad \text{--- (2)}$

$6x^2y + 4y^3 = 6x^2y + 4y^3 \Rightarrow 4y^3 = 4y^3$

$\Rightarrow 4y^3 = y^4 + C$

نحوض على (3) نجد

$f = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C$

الحل العام  $\Rightarrow x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C = 0$

لإيجاد الحل العام  $y' + y^2 = 2y \sin x + \cos x - \sin^2 x$   
و  $y_1 = \sin x$

$y' - 2y \sin x + y^2 = \cos x - \sin^2 x$   
معادلة رينغلي: نفرض الحويل

$y = y_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \sin x + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y' = \cos x + \frac{1}{2}$

المعادلة

نحوض على

15



$$\cos x - \frac{z'}{z^2} + \ln x + \frac{1}{z} = 2 \left( \sin x + \frac{1}{z} \right) \sin x + \cos x - \sin x$$

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{\sin x}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{\sin x}{z} = \frac{2 \sin x}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{\sin x}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\frac{z'}{z^2} = \sin^2 x$$

$$\cos x - \frac{z'}{z^2} - 2 \sin^2 x = \frac{2}{z} \sin x + \sin^2 x + \frac{1}{z^2} = \cos x - \sin^2 x$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z^2} = 0 \Rightarrow z' - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow dz = dx \Rightarrow \boxed{z = x + C}$$

$$y = \sin x + \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = y - \sin x$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{y - \sin x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{y - \sin x} = x + C}$$

محور التماس



في

- ③
- ②
- ①

نلاحظ من عامل التفاضل

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^3} \right) = -\frac{3}{x^4}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^4} \right) = -\frac{4}{x^5}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^5} \right) = -\frac{5}{x^6}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^6} \right) = -\frac{6}{x^7}$$

الاجابة على التفاضل:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^n} \right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

نلاحظ من هذه النتائج ان

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^n} \right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

عامل التفاضل للمعادلة غير التامة

$$2 \sin y \cos y = \sin 2y$$

$$1 \quad \frac{d}{dx} \sin^2 y = 2 \sin y \cos y$$

بشكل عام

(3) توجد  $\mu$

(4) نظرية بالمدلة  $\Leftarrow$  أعمدة  $\nabla$   $\mu$

(5) لا يوجد  $\mu$  على  $\mathbb{R}^2$  الكمال توجد  $F(x, y)$  بحيث  $\nabla F = \mu$

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$$

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$$

$$\mu_Q(F) \quad \text{نقطة (7)}$$

(8)

هناك: أوجد  $\mu$  بالمدلة الكمال

$$(x^2 - \sin^2 y) dx + x \sin 2y dy$$

$$\uparrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2 \cos y \sin y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = \sin 2y$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{-\sin 2y - \sin 2y}{Q} = \frac{-2 \sin 2y}{x \sin 2y} = -\frac{2}{x} dx$$

$$\Rightarrow \ln \mu = -2 \ln x \Rightarrow \mu = x^{-2}$$

$$(1 - x^{-2} \sin^2 y) dx + x^{-1} \sin 2y dy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^{-1} \sin y \cos y = -x^{-2} \sin 2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = x^{-1} \sin 2y = -x^{-2} \sin 2y$$

نلاحظ هنا  $F(x, y)$   $\Rightarrow$   $\mu = x^{-2}$



$$\int \sin ay dy = -\frac{1}{a} \cos ay$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - x^{-2} \sin^2 y \quad \text{--- (1)}$$

البحث عن F

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^{-1} \sin 2y \quad \text{--- (2)}$$

من (2) نكامل بالنسبة لـ y نجد

$$F = x^{-1} \int \sin 2y dy + \varphi(x)$$

$$\Rightarrow F = -x^{-1} \frac{1}{2} \cos 2y + \varphi(x) \quad \text{--- (3)}$$

نشتق (3) بالنسبة لـ x نجد

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{2} (-1) x^{-2} \cos 2y + \varphi'(x) \quad \text{--- (3')}$$

نضرب (3') في x نجد

$$\frac{x^{-2}}{2} \cos 2y + \varphi'(x) = 1 - x^{-2} \sin^2 y$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 1 - x^{-2} \sin^2 y - \frac{x^{-2}}{2} \cos 2y$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 1 - \frac{x^{-2}}{2} (1 - \cos 2y) - \frac{x^{-2}}{2} \cos 2y$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 1 - \frac{x^{-2}}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = x + \frac{1}{2x} + C}$$

نوجد F من (3)

$$F = -\frac{1}{2x} \cos 2y + x + \frac{1}{2x} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2x} \cos 2y + x + \frac{1}{2x} + C = 0}$$

الحل العام

سوال ۱۵ جولائی ۱۹۷۷ء

أوجد عامل التكامل للمعادلة:

$$\underbrace{(x \sin y + y \cos y)}_P dx + \underbrace{(x \cos y - y \sin y)}_Q dy = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = +x \cos y + \cos y - y \sin y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y$$

المعادلة ليست تامة

نہی عنہما من السجود

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{x \cos y - y \sin y}{x \cos y - y \sin y} dx = 1 dx$$

$$\Rightarrow \ln M = x \Rightarrow M = e^x$$

نظروا طرفي المعادلة حاصل التكامل نجد

$$(xe^x \sin y + ye^x \cos y) dx + (xe^x \cos y - ye^x \sin y) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x e^x \cos y + e^x \cos y - e^x y \sin y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = x e^x \cos y + e^x \cos y - e^x y \sin y$$

2015

فهد

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x (x+1) \cos y - e^x y \sin y \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x (x+1) \cos y - e^x y \sin y \quad (2)$$

منه تكامل بالسيرة الحسنة

مثال ۱) با استفاده از روش جداسازی متغیرها

$$F = \int x e^x \cos y \, dx + \cos y \int e^x \, dx - y \sin y \int e^x + \varphi(y)$$

بالتابته

$$y = x \Rightarrow dy = dx$$

$$du = e^x dx \rightarrow u = e^x$$



كربنة ان السعة دالة في سرعة وطول الملام على اننا نقبل كات دالة  $x^2 + y^2$

$$y dx - (x + x^2 + y^2) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 + 2x \quad \text{ليست حالة}$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{كأننا نكتبها هكذا}$$

$$\mu = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{2 + 2x}{-(x + x^2 + y^2)(2x) - y \cdot 2y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 + 2x}{-2x^2 - 2x^3 - 2xy^2 - 2y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{1 + x}{x^3 + x^2 + xy^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1 + x}{x^2(1 + x) + y^2(1 + x)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{\partial (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \ln \mu = -\ln (x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\left( \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \text{arctan} \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = q$$

$$\frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2} dy$$

الجواب على F : المعادلة التامة

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p = \frac{y}{x^2+y^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = q = -\frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2} \quad (2)$$

نعمل بالخطوة 1

$$F = y \int \frac{1}{x^2+y^2} dx = y \left[ \frac{1}{y} \arctan \frac{y}{x} \right] + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow F = \arctan \frac{y}{x} + \varphi(y)$$

نشتق بالخطوة 2

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2} + \varphi'(y)$$

نضرب في 1

$$-\frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2} + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{x-x-x^2-y^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \varphi'(y) = -\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = -1$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = -y + C$$

نضرب في 1

$$F = \arctan \frac{y}{x} - y + C$$

$$\Rightarrow \arctan \frac{y}{x} - y + C = 0$$

الخطوة 2

95

54



$$(p^{\frac{3}{2}})^2 = p^3$$

التحليل الوسيط

المطلوب بالأسئلة الستة

$$F(x, y, z) = 0$$

لاستيعاد  $x$  ولا  $y$

$$F(y) = 0$$

سعة  $x$

$$y = f(x)$$

$$x = f(y)$$

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

مطلوب بالأسئلة الستة

$$y = f(x)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

مطلوب بالأسئلة الستة

$$y = f(x)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$x = f(y)$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3}{2p} x = 0$$

نقطة المتجانسة

وحيدة الخواص

$$\frac{dx}{x} = -\frac{3dp}{2p} \Rightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \ln p + \ln c$$

$$\Rightarrow x = c p^{-\frac{3}{2}} \quad (4)$$

$$\boxed{x = c p^{-\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dp} = c p^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} c p^{-\frac{5}{2}}$$

نقطة المتجانسة

$$c p^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} c p^{-\frac{5}{2}} + \frac{3}{2p} c p^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2p^3}$$

$$\Rightarrow c \left( 1 - \frac{1}{2} p^{-\frac{3}{2}} \right) \Rightarrow c = \frac{1}{2} p^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2} p^{\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} p^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} p^{-2} = \frac{1}{2p^2}$$

نقطة المتجانسة

والآن علينا ان نعوض بأول حل

$$y = xp - x^2 p^3$$

$$y = c p^{-\frac{1}{2}} - c^2 p^3$$

$$\Rightarrow y = c p^{-\frac{1}{2}} - c^2$$

$$x^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}} p^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow p = c^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}}$$

نقطة المتجانسة

نقطة المتجانسة و لا يوجد حل

$$x = c p$$

$$y = c p^{-\frac{1}{2}} - c^2$$

$$\Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}} p^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{c^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{3}{2}}$$

نقطة المتجانسة

(4)



1

2)  $y = 2x^3 + x^3$  كوجد الحل العام: معادلة باينية لا

(3) تصريف  $P$  لا ويرفع

$$y = 2x^3 + x^3$$

(2) مشتق بالنسبة لـ  $x$

$$\frac{dy}{dx} = 2P + 2x \frac{dP}{dx} + 3P^2 \frac{dP}{dx}$$

$$P = 2P + (2x + 3P^2) \frac{dP}{dx}$$

$$\Rightarrow -P = (2x + 3P^2) \frac{dP}{dx}$$

(3) قلنا للمشتق لوجود  $x$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dP} = -\frac{2x + 3P^2}{P}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dP} = -\frac{2x}{P} - 3P$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dP} + \frac{2}{P}x = -3P$$

خطية بتابع  $x$  ومقول  $P$   
نأخذ المتكاملة

$$\frac{dx}{dP} + \frac{2}{P}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dP} = -\frac{2}{P}x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -2 \frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow \ln x = -2 \ln P + \ln C \Rightarrow \boxed{x = C P^{-2}}$$

لنربطنا متوننا في (1) نجد

$$y = 2C P^{-2} + P^3 \Rightarrow \boxed{y = 2C P^{-1} + P^3}$$

والحل البسيط هو  $x = y$  ونحن في حالة حساب  $P$  و  $y$   
الآن نجيب  $P$  من قيمة  $x$  ونقول  $y = x$  لنصل إلى  $34$   
موازاة

$$(p^{-2})^{\frac{1}{2}} (p)$$

لنكتب المعادلة بدلالة  $x$  /  $C$  نجد

$$X = CP^{-2} \Rightarrow P^{-2} = X C^{-1} \Rightarrow P = X^{-\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2} + 2}$$

نضرب في

$$y = 2CP^{-1} + P^3$$

$$\Rightarrow y = 2C (X^{-\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}})^{-1} + (X^{-\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}})^3$$

$$\Rightarrow y = 2C X^{\frac{1}{2}} C^{-\frac{1}{2}} + X^{-\frac{3}{2}} C^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow y = 2 X^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} + X^{-\frac{3}{2}} C^{\frac{3}{2}}$$

وهو الخاطئ

بدلالة  $C$

$C$

طريقة أخرى دوماً

(1) نفرض  $P$  و  $y$  (2) نشتق بدلالة  $x$  (3) نخرج المعادلة

$$(4) \text{ نقله المشتق ليرجع } \frac{dx}{dp} \quad (5) \text{ نطرح معادلة خطية نضرب في } (X=CP)$$

(6) نضرب في المعادلة (7) نضرب في  $P$  ونضرب في (1)

$$(8) \text{ نحل المعاد } X = C^2 + y = C^2 + X^2 \text{ فنحذف } X \text{ ونحذف } C^2$$

1

هوازيك



قوسا الحل العام

$$y'^2 + x(y' + 2) - y = 0$$

$$y' = x y' + 2x + y'^2$$

$$\textcircled{1} y = x p + p^2 + 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = p + x \frac{dp}{dx} + 2p \frac{dp}{dx} + 2$$

$$\Rightarrow p = p + (x + 2p) \frac{dp}{dx} + 2 \Rightarrow -2 = (x + 2p) \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{-2}{x + 2p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{x}{2} - p$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{1}{2}x = -p$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} dp$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}p + \ln c \Rightarrow x = c e^{-\frac{1}{2}p}$$

$$y = c e^{-\frac{1}{2}p} p + p^2 + 2c e^{-\frac{1}{2}p}$$

$$-\frac{1}{2}p = \ln x - \ln c$$

$$\Rightarrow p = 2 \ln \frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow p = 2 \ln \left( \frac{c}{x} \right)$$

$$\Rightarrow y = c e^{-\frac{1}{2} \ln \left( \frac{c}{x} \right)^2} \ln \left( \frac{c}{x} \right)^2 + 2c e^{-\frac{1}{2} \ln \left( \frac{c}{x} \right)^2}$$

$$y = c e^{\ln \left( \frac{c}{x} \right)^{-1}} \ln \left( \frac{c}{x} \right)^2 + 2c e^{\ln \left( \frac{c}{x} \right)^{-1}}$$

$$y = c \left( \frac{c}{x} \right)^{-1} \ln \left( \frac{c}{x} \right)^2 + \ln \left( \frac{c}{x} \right)^4 + 2c \left( \frac{c}{x} \right)^{-1}$$

هذا الزايف

2) إذا تم بحلولة بالتيبة لـ  $x = f(y, y')$  فنفرض  $y = p$  ونشتق بالتيبة لـ  $y$

3) إذا لم يتم للمعادلة لا تفوي لـ

$$x = f(y)$$

نفرض  $y = t$

$$x = f(t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t \Rightarrow dy = t dx$$

$$\Rightarrow y = f(t)$$

أو صياغة العام وسيطية

$$\ln y' + \sin y' - x = 0$$

$$x = \ln y' + \sin y'$$

$$x = \ln t + \sin t$$

نفرض  $y' = t$

فشتق بالتيبة لـ  $t$

$$dx = \left(\frac{1}{t} + \cos t\right) dt$$

$$\text{منه الزا} \Rightarrow dy = t \cdot dx \Rightarrow dy = (1 + t \cos t) dt$$

$$\Rightarrow y = t + \int t \cos t dt + c$$



حل المعادلة:

$$1) y = xy' - x^2 y'^2$$

$$\textcircled{1} \text{ نفرض } y' = p$$

$$y = xp - x^2 p^2 \quad (*)$$

② مشتق بالنسبة لـ  $x$  فنجد

$$\frac{dy}{dx} = p + x \frac{dp}{dx} - 2xp^2 - 3x^2 p^2 \frac{dp}{dx}$$

$$p = p + x \frac{dp}{dx} - 2xp^2 - 3x^2 p^2 \frac{dp}{dx}$$

$$(x - 3x^2 p^2) \frac{dp}{dx} = 2xp^3$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2xp^3}{x - 3x^2 p^2}$$

③ فصل المتغيرات

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x}{2xp^3} - \frac{3x^2 p^2}{2xp^3}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{1}{2p^3} - \frac{3}{2} \frac{1}{p} x$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{3}{2} \frac{1}{p} x = \frac{1}{2p^3} \quad (1)$$

④ خطية في  $x$  معيارية

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{3}{2} \frac{1}{p} x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{3}{2} \frac{dp}{p}$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \ln p + \ln c \Rightarrow \boxed{X = C p^{-\frac{3}{2}}} \quad (*)$$

⑤ نعوض  $X$  في ① نجد

$$y = C p^{-\frac{3}{2}} p - C^2 p^{-\frac{3}{2} \cdot 2} p^3$$

ممتاز

$$-\frac{3}{2} + 1 = -\frac{3+2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = c p^{-\frac{1}{2}} - c^2 \quad \text{هون عرضنا بالاولى قيمة } X \text{ فلوهر } p$$

(6) صا  $X$  فوجدت قيمة  $p$  ونعرفها بالقيمة

$$X = c p^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow X^{\frac{-2}{3}} = c^{\frac{-2}{3}} p \Rightarrow p = c^{\frac{2}{3}} X^{\frac{-2}{3}}$$

(7) فوضف من قيمة  $X$  و  $p$  فوجدنا المعاد

$$y = c \left( c^{\frac{2}{3}} X^{\frac{-2}{3}} \right)^{\frac{-1}{2}} - c^2$$

$$y = c \left( c^{-\frac{1}{3}} X^{\frac{1}{3}} \right) - c^2 \Rightarrow y = c^{\frac{2}{3}} X^{\frac{1}{3}} - c^2$$

وهو الحل العام

$$y - x y^2 = y^2$$

فوجدنا المعاد للمعادلة

$$y = x p^2 + p^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x p \frac{dp}{dx} + p^2 + p^2 \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (2x p + 2p) \frac{dp}{dx} + p^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(x+1)p \frac{dp}{dx} + p^2$$

$$\Rightarrow p - p^2 = 2(x+1)p \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 1 - p = 2(x+1) \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1-p}{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2(x+1)}{1-p} \Rightarrow \frac{dx}{2(x+1)} = \frac{dp}{1-p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(x+1) = -\ln(1-p) + \ln c \Rightarrow (x+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{1-p}$$



أثبت ان هذا صحيح

$$1 - 1 \Rightarrow 1 + X = \frac{C^2}{(1-p)^2}$$

$$(*) \Rightarrow X = \frac{C^2}{(1-p)^2} - 1$$

فوضعي في اول معادلة جذر

$$y = \left(\frac{C^2}{(1-p)^2} - 1\right) p^2 + p^2$$

لنوجد من علاقة X (\*)

$$X+1 = \frac{C^2}{(1-p)^2} \Rightarrow \left(\frac{1-p}{C}\right)^2 = \frac{1}{X+1} \Rightarrow 1-p^2 = \frac{C^2}{X+1}$$

$$1-p = \frac{C}{\sqrt{X+1}}$$

$$\Rightarrow p = 1 - \frac{C}{\sqrt{X+1}}$$

فوضعي X و p في

$$y = \left(\frac{C}{\sqrt{X+1}} - 1\right) \left(1 - \frac{C}{\sqrt{X+1}}\right)^2 + \left(1 - \frac{C}{\sqrt{X+1}}\right)^2$$

$$y = \left(X + 1 - \frac{C}{\sqrt{X+1}}\right) \left(1 - \frac{C}{\sqrt{X+1}}\right)^2 + \left(1 - \frac{2C}{\sqrt{X+1}} + \frac{C^2}{(X+1)}\right)$$

$$y = X \left( \frac{(X+1)^2 - 2C(X+1) + C^2}{(X+1)^2} \right) + \left( \frac{(X+1)^2 - 2C(X+1) + C^2}{(X+1)^2} \right)$$

$$y = \left(1 - \frac{C}{\sqrt{X+1}}\right)^2 (X+1)$$

وهو المطلوب

نتبع بالخط

$$X = \frac{C^2}{(1-p)^2} - 1$$

$$y = \frac{C^2}{(1-p)^2} - 1$$

هوا ابيك

حلوله بالنسبة لـ  $x$  مستقلة بالنسبة لـ  $y$  و  $x$  و  $y$  متغيران  
 $p = \frac{dy}{dx}$  و  $x = x$  و  $y = y$

لـ  $y$  بالحل العام  $\frac{dy}{dx} = x(x(y) + 2) - y = 0$

حلوله صريحة

$$y' = 2\sqrt{y} \left( x - \frac{2y}{y'} \right)$$

$$y' = 2\sqrt{y} \cdot x - 4 \frac{\sqrt{y} \cdot y}{y'} \Rightarrow 2\sqrt{y} \cdot x = y' + 4 \frac{\sqrt{y} \cdot y}{y'}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} y^{\frac{3}{2}} y' + 2 y y'^{-1}$$

$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$   
 تعريف  $p = \frac{dy}{dx}$

$$x = \frac{1}{2} y^{\frac{3}{2}} p + 2 y p^{-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{4} y^{\frac{3}{2}} p + \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} \frac{dp}{dy} + 2 p^{-1} - 2 y p^{-2} \frac{dp}{dy}$$

حسب بالنسبة لـ  $y$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} \frac{dp}{dy} - \frac{1}{4} p y^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{p} - 2 y p^{-2} \frac{dp}{dy}$$

$$\left( -\frac{1}{p} - \frac{1}{4} p y^{\frac{3}{2}} \right) + \left( \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} - 2 y p^{-2} \right) \frac{dp}{dy} = 0$$

(متغيرا والثابتة  $y$  هو  $p$ )

$$\left( p^{-1} - \frac{1}{4} p y^{\frac{3}{2}} \right) + \left( \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} - 2 y p^{-2} \right) \frac{dp}{dy} = 0$$

$$-\frac{1}{2} y p \left( 2 y p^{-2} + \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} \right) + \left( \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} - 2 y p^{-2} \right) \frac{dp}{dy} = 0$$

$$\left( \frac{dp}{dy} - \frac{1}{2} y p \right) \left( \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} - 2 y p^{-2} \right) = 0$$

$$\frac{dp}{dy} - \frac{1}{2} y p = 0 \Rightarrow y^{-\frac{1}{2}} = 4 y p^{-2} \Rightarrow y = 4 y^{-2} p^2$$

$$4 y^3 = \frac{p^2}{p^2}$$

الان



$$\Rightarrow P^4 = 16y^3 \Rightarrow P = 2y^{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} P y^{-\frac{1}{2}} + 2y P^{-1}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} \cdot 2y^{\frac{3}{4}} y^{-\frac{1}{2}} + 2y^2 y^{-\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{X^4 = 16y} \quad \text{نقطة 3}$$

$$2) \frac{dP}{dy} = \frac{P}{2y} \Rightarrow P = c\sqrt{y} \Rightarrow \boxed{y = \frac{P^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} P y^{-\frac{1}{2}} + 2y P^{-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{2} P \frac{P^{-1}}{c^{-1}} + 2 \frac{P^2 P^{-1}}{c^2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{c}{2} + \frac{2P}{c^2} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نقطة 4} \\ Y = \frac{P^2}{c^2} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow P = c\sqrt{y} \Rightarrow X = \frac{c}{2} + \frac{2c\sqrt{y}}{c^2}$$

$$\Rightarrow cX = \frac{c^2}{2} + 2\sqrt{y} \Rightarrow 2\sqrt{y} = cX - \frac{c^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \frac{cX}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \left( \frac{cX}{2} - \frac{c^2}{4} \right)^2}$$

مسألة

لحل المسألة لا نفرض

$$\ln y' + \sin y' - x = 0 \quad \text{نوجد الحل العام وطريقاً}$$

$$x = \ln y' + \sin y'$$

$$\frac{dy}{dx} = t \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

$$x = \ln t + \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{t} + \cos t\right) \Rightarrow dx = \left(\frac{1}{t} + \cos t\right) dt$$

$$\frac{dy}{dx} = t \Rightarrow dy = t dx$$

نضرب

$$\Rightarrow dy = (1 + t \cos t) dt$$

نكامل

$$\Rightarrow y = t + \int t \cos t dt + C$$

$$du = \cos t dt \Rightarrow u = \sin t$$

$$y = t + t \sin t + \cos t + C$$

$$\Rightarrow y = t + t \sin t + \cos t + C$$

$$x = \ln t + \sin t$$

طريقة أخرى

نضع  $t = y'$  أي  $\frac{dy}{dx} = t$  فنجد  $x$  ونستعملها في المعادلة

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} + \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = t \Rightarrow dy = t dx$$

$$y = \int \left( \frac{1}{t} + \cos t \right) dt$$

$$y = \ln t + \sin t + C$$

$$x = \ln t + \sin t$$

الحل



1 / دستگاه

لذا كانت المعادلة لا تحتوي على  $x$  ،

$$y = \ln(1+y^2)$$

$$y = \ln(1+t^2) \quad \text{تعريف } y = t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{2t}{1+t} dt$$

$$\text{لكن } dx = \frac{dy}{y} = \frac{2t}{1+t} dt$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2t}{1+t} dt$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\Rightarrow x = \arctan t + c$$

$$\text{أي الاسم بسيطاً } \begin{cases} x = \arctan t + c \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$$

الطريقة:

$x$  غير موجوده ① تعريف  $y = t$  ② تحويل المعادلة

③ مشتقة  $y$  بالنسبة لـ  $t$  ④ تفصل  $dy$  لـ  $dt$

⑤ تعريف  $t = \frac{dy}{y}$  مالترون ⑥ تفصل  $dx$

⑦ إيجاد  $x$  و  $y$  ⑧ الكل بسيطاً

$$x = \arctan t$$

1-1

لا تحتوي لا  $x$  ولا  $y$  بنفس الوقت

$$F(y) = 0$$

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$$

حلها العام

نوجد الحل العام:

$$3y^4 - 3y^{12} + 5 = 0$$

الحل:

$$3\left(\frac{y-c}{x}\right)^4 - 3\left(\frac{y-c}{x}\right)^{12} + 5 = 0$$

وهو الحل العام



# شوية تكاملات

$$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$$

ADANOU V

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

جعفر زدنوف

$$\int \frac{1}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a} \tan ax + c$$

$$\int \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \int \frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x} dx$$

$$= \ln(1-\ln x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx ; u = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow du = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx ; u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{2e^x e^{2e^x}}{g'(x) g(x)} dx = \frac{e^{2e^x}}{g(x)}$$

$$\int 2 \sin x e^{-2 \cos x} dx = e^{-2 \cos x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{1}{\cos ax} + \tan ax \right| + c$$

$$= \frac{1}{a} \ln \left| \tan \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{1}{\sin ax} + \cot ax \right| + c$$

$$= \frac{1}{a} \ln \left| \tan \frac{ax}{2} \right| + c$$

دربة البسط أكبر من مقام  
منه درجه المقام  
فقمع البسط على المقام ونوجد تكامله =

فقرق الكسور  
البسط أكبر  
منه المقام

$$\int \frac{1}{x^2+1} = \arctg x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

زدنوف

هوازيك

$$\int g'(x) g(x) dx = g(x)$$

$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)}$$

$$\int \cos x \sin x e^{\cos x} dx$$

$$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\int -t e^t dt$$

$$u = t \Rightarrow du = dt$$

$$du = -t e^t dt \Rightarrow u = -t e^t$$

$$u = t \Rightarrow du = dt$$

$$du = e^t dt \Rightarrow u = e^t$$

$$- [t e^t - \int e^t dt]$$

$$= - [t e^t - e^t]$$

$$= - [t - 1] e^t$$

$$\int \cos x \sin x e^{\cos x} dx$$

$$- \cos x = t$$

تعريف



$$\star \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 \cdot x} + C$$

$$\int \frac{dy}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$$

$$\star \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\star \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = -\int x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\star \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C$$

$$= -\frac{1}{2} \int 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\star \int \frac{f}{\cos^2 f} dx = \tan f$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$\star \int \frac{e^x (ax^2 + bx + c)}{dx} dx$$

u

ونكره

$$\star \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{4\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{4\sqrt{x}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2}{\sqrt{x}} e^{4\sqrt{x}} dx = -\frac{1}{2} e^{4\sqrt{x}} + C$$

$(e^{4\sqrt{x}})' = \frac{2}{\sqrt{x}} e^{4\sqrt{x}}$

$$\star \int \ln x dx \quad ; \quad u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dx = dx \Rightarrow u = x$$

$$= x \ln x - x$$

$$\star \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\star \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\star \int x e^{\frac{3x^2}{2}} dx = \frac{1}{3} \int 3x e^{\frac{3x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{\frac{3x^2}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{e^{3x^2}}$$

$$\int \frac{x \cdot x}{(x^2+1)^2} dx \rightarrow u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dx = \frac{x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow 2u = \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\star \int \frac{x}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+4)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C$$

$$\star \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\star \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{3} \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

(sign)



# ① طرق تفريغ الكسور متى تستعملها؟ J'afar Adanour

استعمله عندما يكون لدينا تكامل كسر دالة البسط هي نفس مقام

البسط كالمقام  $\rightarrow$  (نقسم البسط على المقام)

في حالة أخرى: خلال المقام إلى جداء أقواس (عوامل أولية)

كـ دافد القوس دالة أخرى (كـ دافد القواسم) ولا واحد مشترك

التوسع للتوسيع  
هو التكرار

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

كـ دافد القواسم دالة أخرى (كـ دافد القواسم) ثم نقسم البسط على المقام التي قدم مقام A

في حالة التكرار

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

فرض الـ A كالعادة

ثم نوجد C (الفرق الذي فوقه أ على نفسه الطريقة) فنحن نريد أن نحصل على

ثم B نقسم A بالعلامة وأضرب x من مجموعة التعريف

★ داخل القوس دالة ثالثة بلا تكرار ★

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

دالة ثالثة

نوجد A مثل العادة

لنوجد B فنضرب الطرفين بـ x (بـ دالة البسط دالة المقام) ونوجد الأجزاء

نحلل التركيب بـ x  $\rightarrow \infty$  (بـ دالة مع معادلة فيها A, B, C مجهولين نعرف

أهمنا A بقية شيء B)  $\Rightarrow 0 = A + B$  (بـ دالة البسط)

لنوجد C نقسم A, B ونختار نتيجة لـ x من مجموعة التعريف (بـ دالة التركيب الأمثل)

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

في حالة التكرار الدالة الثانية نضع

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{Dx^2+Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

هناك هوزايك



$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

مثال على ما سبق:

نقوم الكور بالطريقة

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

درجة كاسر < درجة المقام

نفس A نظري طريق العلاقة بـ X ونحذف من كل X بـ 0 في

$$\frac{1}{x^2+1} = A + \frac{(Bx+C)x}{x^2+1} \Rightarrow (1=A)$$

نحسب B نظري طريق العلاقة بـ X لنجعل درجة البسطا درجة المقام

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} = A + \frac{Bx^2+Cx}{x^2+1}$$

ونوجد نهاية العلاقة الثانية عندما  $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2+1} \right) = A + \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{Bx^2+Cx}{x^2+1} \right)$$

لا نحتاج الى

$$\Rightarrow 0 = A + B$$

$$\Rightarrow B = -A$$

نحسب C نظري طريق A و B بالعلاقة بـ

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x+C}{x^2+1}$$

ونختار قيمة لـ A من مجموعة التوزيع R لـ R

$$\frac{1}{2} = 1 + \frac{-1+C}{2} \Rightarrow \frac{1+C}{2} = \frac{1+C}{2} \Rightarrow C+1=1 \Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-x}{x^2+1} dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

✓